Les fractions et les nombres décimaux

I) rappel historique

Le premier type de nombres qui est venu à l'esprit de l'homme est celui des nombres naturels(entiers) qui visent à rendre compte de la pluralité d'objets identiques ou non.L'idée de comptage, de dénombrement pour permettre les comparaisons, pour garder la méùmoire des quantités, de leur évolution a conduit à l'élaboration de systèmes de représentations,de désignation de ces quantités, c'est-à-dire à dessystèmes de numération plus ou moins complexes.Pour partager ou pour mesurer des grandeurs, il a fallu penser à de nouveaux nombres :les fractions et ensuite les décimaux.

C'est par cette entrée que les fractions et les nombres décimaux doivent être introduits à l'école élémentaire au cycle 3.Ces nombres doivent apparaître comme de nouveaux nombres, utiles pour résoudre des problèmes que les nombres entiers ne permettent pas de résoudre de façon satisfaisante :problèmes de partage, de mesures de longueurs ou d'aires, de repérage sur une graduation.

L'idée de fraction est née de la nécessité de fractionner des entités en parts égales.Les égyptiens et les babyloniens ont d'abord utilisé des fractions de numérateur égal à 1, c'est à dire les quantièmes : $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, etc .Ces nombres sont nés d'une nécessité pratique : partage de terrains, de troupeaux, de quantités diverses.Puis sont apparues des fractions comme $\frac{2}{3} \, ou \, \frac{3}{4}$, toujours inférieures à l'unité .Le dénominateur indiquant en combien de parts l'unité doit être partagée et le numérateur le nombre de fois ou l'on doit prendre le résultat du partage de l'unité.
C'est le problème posé par la mesure des grandeurs qui va étendre le sens des fractions à une nouvelle signification, celle de rapport entre deux entiers.
Pour les décimaux, ce sont des fractions décimales et l'adoption de leur écriture décimale s'est produite de façon indépendante au moyen-orient(15ème siècle) et en Europe(16ème siècle).
Pour Al-Kasi au moyen-orient, la généralisation de la numération décimal de position des entiers se fait à l'image d'un système sexagésimal de position où les fractions de l'unité s'appelaient minutes,secondes,tierces….IL introduit donc les fractions décimales dans le même esprit que les fractions sexagésimales et pour les écrire, place un trait après la partie entière ou indique pour chaque chiffre, la position qu'il occupe ou donne seulement l'ordre du dernier chiffre : ainsi 36 | 23 ou 3 ‖ 6 | 2'3'' ou encore 3623''.
En occident François Viète sépare lui aussi les parties entières et décimales par une barre verticale.
C'est le flamand Stevin qui a dévellopé l'utilité des nombres décimaux pour faciliter les calculs.Il a proposé un système de notation(dévellopé dans un petit fascicule intitulé « la disme ») qui était le suivant :
$261 + \frac{843}{1000}$ s'écrirait : 261 0 8 1 4 2 3 les chiffres 0, 1, 2 étant entourés pour montrer qu'ils indiquaient le rang des différents chiffres présents .
Puis Neper utilisera la notation 261.843 qui deviendra 261,843

II) rappel sur les notions mathématiques

A) les fractions et les rationnels

1) définition et propriétés

Une fraction d'entiers est un quotient de deux entiers notée $\frac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers et b un entier non nul.C'est un représentant d'un nombre rationnel qui est solution de l'équation b x = a

Dans l'ensemble des entiers (positifs noté $\mathbb{N}$ ou négatifs noté $\mathbb{Z}$) , les opérations portant sur les nombres entiers(addition,soustraction, multiplication) donnent des résultats qui sont encore des nombres entiers mais ce n'est pas le cas pour la division qui n'aboutit pas toujours à un nombre entier .

Ainsi l'équation bx = a n'a pas toujours une solution dans l'ensemble des entiers .Par contre, elle a toujours une solution dans l'ensemble des nombres rationnels(noté Q) .

Cet ensemble posséde un certain nombre de propriétés :

- la somme, la différence, le produit, le quotient de deux nombres rationnels est un nombre rationnel
- on peut ordonner l'ensemble des nombres rationnels car on peut ordonner les fractions
- entre deux rationnels , on peut intercaler une infinité de rationnels
- Un nombre rationnel est un nombre qui peut être représenté par une infinité de fractions d'entiers.Exemple : $\frac{15}{21} = \frac{5}{7} = \frac{30}{42} = \frac{10}{14} = ...$

2) Les différents sens de l'écriture fractionnaire :

a) Une première signification liée au partage :

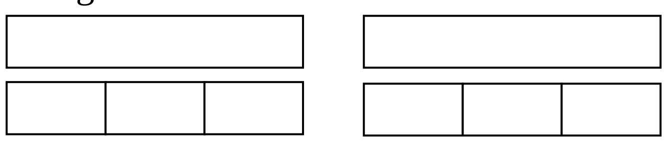
On partage l'unité en b parties égales, puis on en prélève a parties.

Dans ce cas $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + ...\frac{1}{b}$ (a fois)

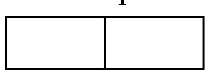
Cette signification est facilitée par la lecture orale en usage : $\frac{2}{3}$ est lu « deux tiers ».C'est cette signification qui est utilisée pour introduire les fractions simples à l'école élémentaire.Elle est plus difficile à comprendre pour des fractions plus grandes que l'unité.

Dans le domaine de la mesure cette signification est liée au mesurage par fractionnement de l'unité : partage du segment unité en b parties égales pour obtenir un segment de mesure de longueur $\frac{1}{b}$ et ajout de a mesures $\frac{1}{b}$ pour obtenir un segment de mesure de longueur $\frac{a}{b}$.

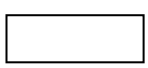
Partage :

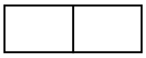


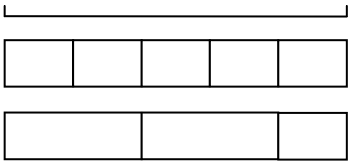
Partage de 2 bandes en 3 : chaque bande est partagée en 3

Le résultat est 2 x $\frac{B}{3}$: 

Mesure :

Mesure d'un segment avec une bande unité U 

Mesurage par fractionnement de l’unité : 
segment de longueur L

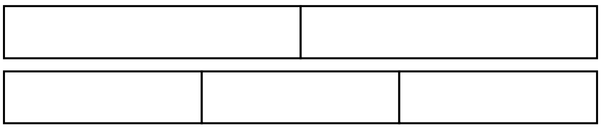


Résultat :L= $\frac{5}{2}$U ou L= 2U + $\frac{1}{2}$U

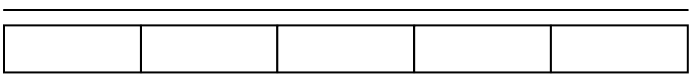
b) Une deuxième façon d’effectuer le partage :
On partage a en b parties égales.Il y a partage de la totalité .

Ce qui sous-entend la notion de quotient de deux nombres, le rationnel $\frac{a}{b}$ apparaît comme la solution de l’équation : bx ?=a.(sens donné au collège).
Dans le domaine de la mesure cette signification est liée au mesurage par commensuration : Partage du segment de mesure de longueur a en b parties égales. La mesure de la longueur du segment obtenu est $\frac{a}{b}$.

Partage :



La longueur totale de 2 bandes mises bout à bout est partagée en 3.
Le résultat est $\frac{2B}{3}$.
Mesure :
Mesurage par commensuration : on fait coïncider 2B avec 5U :



c) l’aspect fonctionnel :

le rationnel $\frac{a}{b}$ est considéré comme notation fonctionnelle (« composition d’opérateurs »).C’est ainsi l’abréviation de la fonction « multiplier par a sur b », composée de la fonction « multiplier par a » et de la fonction « diviser par b ».
Dans le domaine de la mesure cette signification est liée à la proportionnalité entre les mesures.(par exemple dans le cas d’un agrandissement)

B) les nombres décimaux

1) définition et propriétés

Un nombre a est un nombre décimal s'il peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale :a= $\frac{b}{10^n}$ où b est un entier relatif et n un entier naturel.

Les nombres décimaux sont donc des nombres rationnels particuliers :ce sont les rationnels qui peuvent être représentés par une fraction irréductible dont le dénominateur est le produit d'une puissance de 2 par une puissance de 5 : $2^n x 5^m$

L'ensemble des nombres décimaux est noté D ; il possède les propriétés suivantes :

- la somme, la différence, le produit de deux nombres décimaux est un nombre décimal
- le quotient de deux nombres décimaux n'est pas toujours un nombre décimal :

exemple :les deux nombres $\frac{25}{10} et \frac{35}{10}$ sont des nombres décimaux mais leur quotient vaut : $\frac{\frac{25}{10}}{\frac{35}{10}} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$; or 7 n'est divible ni par 2, ni par 5(c'est un nombre premier) le quotient de $\frac{25}{10} par \frac{35}{10}$ n'est donc pas un nombre décimal.

- Tout nombre décimal est un nombre rationnel, un nombre rationnel n'est pas toujours un nombre décimal

2) Une autre écriture des nombres décimaux :

Pour exprimer des quantités inférieures à 1 tout en gardant le principe de notre système de numération pour l'écriture des nombres entiers dont la base est 10 et qui est positionnel(chaque symbole prend une valeur différente en fonction de la place qu'iloccupe dans l'écriture du nombre),on a pu donner du nombre décimal une nouvelle écriture en prolongeant le système d'écriture de la décomposition canonique d'un nombre entier en utilisant pour les nombres décimaux les puissances négatives.

Ainsi 5896= $5x10^3 + 8x10^2 + 9x10^1 + 6x10^0$

Et en prolongeant ce système, le nombre $\frac{48385}{1000}$ se décompose sous la forme $4x10^1 + 8x10^0 + 3x10^{-1} + 8x10^{-2} + 5x10^{-3}$.

Il est ainsi possible d'exprimer un nombre décimal à l'aide de puissances de 10 comme pour les nombres entiers en utilisant uniquement le rang occupé par chaque chiffre pour indiquer la puissance de 10 auquel il fait référence.

Le nombre décimal est donc ainsi composé d'une partie entière (représentée par les chiffres 4et 8) et d'une partie décimale (représentée par les chiffres 3, 8, et 5)

Pour distinguer ces deux composantes du nombre,il a suffi de les séparer par la virgule.Ainsi, est née l'écriture à virgule d'un nombre décimal .

L'écriture décimale est donc une autre écriture qui est introduite à partir de l'écriture fractionnaire pour lui donner du sens :

$\frac{48385}{1000}$ = 4 + $\frac{8}{10} + \frac{3}{100} + \frac{8}{1000} + \frac{5}{10000}$ = 4,8385

L'écriture à virgule n'est pas seulement réservée aux nombres décimaux .On l'utilise aussi pour représenter des nombres rationnels ou des nombres réels :on distingue alors 3 cas :

- l'écriture est finie :lorsqu'il s'agit d'un nombre décimal
- l'écriture est infinie mais périodique :lorsqu'il s'agit d'un nombre rationnel non décimal
- l'écriture est infinie et non périodique lorsqu'il s'agit d'un nombre réel non rationnel(irrationnel) comme π ou $\sqrt{2}$

remarque : les nombres entiers ont une propriété particulière, ce sont les seuls nombres qui possèdent deux écriture à virgule :une écriture finie et une écriture périodique infinie ;par exemple 2=1.999999….. et 2=2,0
en effet si a = 1,999999…. Alors 10a = 19,99999… et 10a – a = 18 donc 9a = 18 d'où a = 2.

3) à quoi servent les nombres décimaux ?

Avec cette écriture à virgule, on les utilise dans le domaine de la mesure :
Si l'on effectue des mesures à l'aide d'instruments dont la précision est limitée, en utilisant un systèmes d'unités fondé sur le système décial et en privilégiant l'une de ces unités, les résultats peuvent facilement être exprimés par des décimaux.
Il s'agit seulement de donner à l'aide des nombres décimaux une approximation de la valeur exacte de la longueur mesurée.
Les nombres décimaux sont donc utiles pour :

- exprimer le résultat d'un mesurage effectif à l'aide d'un instrument et avec le choix d'une unité adaptée
- approcher tout quotient d'entiers (rationnel) d'aussi près que l'on veut
- approcher tout réel d'aussi près que l'onveut et permettre ainsi de graduer la droite numérique.
- Opérer sur eux avec les mêmes règles de calcul que pour les nombres entiers à condition de respecter les règles de positionnement de la virgule et de ne pas avoir une conception erronée de l'écriture à virgule.

III) Les difficultés dans l’apprentisage des décimaux

Avant de définir une progression possible, rappelons les principales difficultés rencontrées dans l’apprentissage des nombres décimaux.
L’extension du domaine numérique des entiers naturels aux décimaux ne va pas de soi.Il s’agit pour les enseignants et pour les élèves d’une véritable rupture qui va entraîner un certain nombre de difficultés.
1. La perception d’un nombre décimal doit être rapprochée de la décomposition à l’aide de fractions décimales et ne doit être la juxtaposition de deux entiers (partie entière et partie décimale) qui provoque ce type d’erreurs :
- dans la comparaison :2,234 > 2,3 car 234 > 3
- dans les calculs : 17,3 + 21,8 = 38,11

2.La partie décimale ne doit pas être perçue comme un nombre entier,ayant un nombre limité de chiffres , non détachable de la sous-unité(comme 3,25 pour 3 euros et 25 cent ou 3 minutes et 25 secondes ou 3 mètres et 25 centimètres) ce qui provoque ce type de comportement :
- il n’y a pas de nombre décimal entre 4,32 et 4,33
- 2,5 est différent de 2,50
- 3,40 a pour prédécesseur 3,39

3. l’apprentissage intervient après un long travail sur les nombres entiers du CP au CM1, il sera donc difficile d’empêcher les élèves de vouloir traiter les décimaux sur le modèle des nombres entiers qu’ils commencent à bien maîtriser.

4. Les nombres décimaux diffèrent des nombres entiers essentiellement par leurs propriétés liées à l’ordre :
- l’idée de sucesseur n’a plus de sens
- entre deux nombres décimaux, on peut intercaler une infinité de nombres décimaux alors qu’entre deux entiers naturels, il y a un nombre fini d’entiers naturels .
- les règles de comparaison ne sont pas les mêmes.

et par les règles sur les opérations .

5. La multiplication d’un nombre décimal par un nombre entier qui doit être installée avant celle de deux décimaux, va présenter une nouvelle difficulté :
En effet 6x3 a souvent comme premier sens celui d’une addition itérée 6+6+6 ou 3+3+3+3+3+3. Mais dans le cas d’un nombre décimal par un entier, par exemple 3x2,5, seule est significative l’égalité 3x2,5=2,5+2,5+2,5. Les deux facteurs du produit ont de fait un rôle dissymétrique et des questions se posent alors :
- peut-on écrire 3x2,5 = 2,5x3 ?
- le sens premier de l’addition itérée est-il encore pertinent ?
- ne faudrait-il pas introduire d’emblée une autre signification ?

Et dans le cas du produit de deux décimaux, une rupture de sens va se produire puisque 2,5 x 4,7 ne peut signifier 2,5 itéré 4,7 fois !
6. La multiplication de deux entiers non nuls a toujours un résultat supérieur à chacun de ses deux facteurs et cela devient faux lors de la multiplication de deux nombres décimaux.Ainsi 0,5x6=3 et 3 est inférieur à 6.
C’est pour cela que bien souvent, l’élève écrit 6x0,5 =30.

IV) Une progression possible

A) les différents aspects à prendre en compte

Il s'agit donc de mettre en place une première maîtrise des fractions et des décimaux par la compréhension de leurs écritures, la mise en relation des écritures à virgule et des sommes de fractions décimales, la comparaison des décimaux, l'utilisation des graduations.

Il semble important de tenir compte de différents aspects dans la mise en place des nombres décimaux :

- ✓ Les connaissances et les conceptions des élèves :
  - ils ont en début de CM certaines connaissances issues des pratiques sociales ou des classes antérieures concernant les fractions simples (demi,quart..) qui font référence à des parts sur un disque(tarte)
  - ils peuvent avoir rencontrer des expressions comme « prendre la moitié ou le quart » ou des expressions où figurent des écritures à virgule pour matérialiser des expressions composées qui font intervenir plusieurs unités
- ✓ Les nombres décimaux sont pour eux de nouveaux nombres
- ✓ Les nombres décimaux ont deux écritures, une écriture fractionnaire et une écriture à virgule
- ✓ Les règles de comparaison sont différentes de celles des nombres entiers : les élèves utilisent souvent un théorème en acte : parmi deux nombres, le plus grand est celui qui a l'écriture la plus longue
- ✓ Entre deux décimaux, on peut placer une infinité d'autres décimaux
- ✓ Les nombres décimaux sont utiles dans les activités de mesure
- ✓ Les nombres décimaux servent à approcher d'autres nombres
- ✓ Les techniques de calculs sur les nombres entiers se prolongent dans l'ensemble des nombres décimaux

Pour cela :

- ✓ Il faudra éviter d'introduire les décimaux à partir des mesures de grandeur avec les unités usuelles, utilisant des unités et des sous unités car cela conduit à la conception du décimal comme la donnée de deux nombres entiers séparés par la virgule.
- ✓ Il est nécessaire de faire prendre conscience que les entiers ne suffisent plus pour résoudre certains problèmes.
- ✓ L'introduction des nombres décimaux à partir des écritures fractionnaires permettra de donner du sens à chaque chiffre de l'écriture à virgule.
- ✓ Il faudra s'appuyer sur la droite numérique pour faire prendre conscience des règles relatives à l'ordre pour les décimaux, car l'emboîtement des graduations est un axe important dans l'étude des nombres décimaux.

B) Progression CM1

1) <u>Ce qu'il est nécessaire de maîtriser avant l'introduction des nombres décimaux</u>

Fractions et nombres décimaux permettent d'exprimer le résultat d'un partage ou d'une mesure 'une unité étant donnée) ; ils permettent aussi de repérer les points d'une droite.

Il est donc nécessaire de maîtriser :

- la numération sur les nombres entiers :

- le système de position
- les règles de comparaison
- plus particulièrement les relations qui existent entre les différents ordres d'unités.
- La mise en évidence des relations opératoires entre les groupements, utilisées dans les calculs multiplicatifs
- Multiplier par 10, 100, 1000
- L'utilisation des expressions « n fois plus grand », « n fois plus petit »pour comparer des nombres, et plu particulièrement entre unités,dizaines, centaines avec n= 10, 100, 1000…

Les situations qui permettent de réactiver ces connaissances :

- **l'enveloppe de nombres** (avec les nombres entiers)
- **la machine à multiplier ou à diviser**

- les notions de grandeur et de mesure :

- être capable de distinguer objet, grandeur et mesure
- être capable de reporter un étalon n fois et d'associer la mesure au nombre de reports.

- la graduation d'une droite : construction et repérage de points

- **situation : les fils numériques** (ermel CM1)
- **situation : la règle cassée** (Cap math)
- **situation : repérage d'un point 1** (donner du sens aux mathématiques-tome2-Bordas)

- les partages équitables

2) <u>Introduire les fractions simples :</u>

- en utilisant le cadre du partage

  On réactive les connaissances sociales sur les fractions simples avec les situations :

  - **Les horloges** (ermel CM1)
  - **Les drapeaux** (outils pour les cycles).
  - **Les gâteaux** (donner du sens aux mathématiques,tome2,Bordas)
  - **Le partage équitable,**
  - **Les tartelettes,**
  - **Les tablettes de chocolat** (IREM de Rennes);

- en utilisant le cadre de la mesure de longueurs

  On va proposer des situations pour lesquelles l'utilisation des nombres entiers est insuffisante. L'objectif sera alors de réinvestir les écritures fractionnaires dans un contexte de mesure
- **Situation :La bande unité** (ermel cm1):il s'agit d'exprimer avec l'unité donnée par une bande unité,la mesure de la longueur d'un segment.les segments sont tels que la mesure de leur longueur n'est pas un nombre entier d'unitésLa longueur restante est inférieure à l'unité.Les élèves doivent écrire un message pour indiquer la mesure de la longueur du segment dont ils ont la charge.La synthèse doit faire apparaître des nombres exprimés à l'aide de fractions simples,celles qui expriment une action telle que plier en deux,en quatre, etc.par report de bandes des écritures telles que $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ pourront être mises en évidence,montrant ainsi que l'écriture additive est liée au report.l'activité sera prolonger par le mesurage de la longueur de segments et par la construction de segments dont la longueur est donnée, puis par le repérage de positions de points sur une droite numérique.
- **Situation : Quelle bande ont-ils ?**(IREM de Rennes) (cette situation utilise les écritures fractionnaires comme résultats de mesurage par commensuration ou par fractionnement de l'unité)
- **Situation :Travail sur les demis :**On va utiliser la fraction $\frac{1}{2}$ dans d'autres contextes.

3) <u>Extension à d'autres fractions élémentaires :</u>
- **Situation : Fractionner l'unité en 2, 3, 4, 5, …parts :**utilisation d'un guide-âne
- **Situation : La machine à partager des bandes et des segments** (IREM de Rennes)

4) <u>Graduer une droite numérique et utilisation des fractions</u>

il s'agit d'utiliser des fractions et des écritures additives pour situer des points sur une demi-droite graduée et pour exprimer des distances .
- **Situation : repérage d'un point 2** (donner du sens aux mathématiques-tome2 Bordas)
- **Situation : Droite graduée 1**(ermel CM1)

5) <u>Introduction des fractions décimales et des écritures à virgule</u>
- **Situation : Droite graduée 2** (ermel CM1)
- **Situation : la machine(suite)**
- **Situation :le compteur**

6) <u>Comparaison des nombres décimaux</u>

Dans le cadre du partage :
- **Situation : ont-elles la même part ?(**IREM de Rennes) cette activité fait intervenir les décimaux en privilégiant l'écriture fractionnaire.
- **Situation :Des nombres égaux(**IREM de Rennes), il s'agit de situations d'entraînement sur l'égalité des écritures en dehors de leur contexte d'introduction

Dans le cadre de l'utilisation de la droite graduée:

- **Situation :Comparaison de décimaux** (ermel CM1), il s'agit d'élaborer des procédures de comparaison des nombres décimaux en s'appuyant sur la signification des différents chiffres de leur écriture à virgule.

7) Somme et différence de nombres décimaux

- **Situation : Somme et différence de nombres décimaux(ermel CM1)**
- **Situation : Les fournitures (ermel CM1)**

8) multiplication et division d'un nombre décimal par 10, 100, 1000

- **Situation : Que devient l'unité ?**(ermel CM2) il s'agit de faire calculer des produits d'un nombre décimal par 10, 100, 1000 en mettant en œuvre des procédures personnelles.Une règle de calcul étant ensuite dégagée et formulée.

9) multiplication d'un nombre décimal par un entier

- **Situation : Multiplier un décimal par un entier** (ermel CM2). il s'agit de faire calculer des produits d'un nombre décimal par un nombre entier en mettant en œuvre des procédures personnelles.Une règle de calcul étant ensuite dégagée et formulée.

C) Progression CM2

D'après les nouveaux programmes, pour cette classe il s'agira de :

1) réactiver les connaissances sur les écritures fractionnaires :
   - **Situation : Les bandes** (ermel CM2)

2) placer des points sur une graduation à l'aide des fractions et des nombres décimaux
   - **Situation :Graduations**(ermel CM2)

3) réintroduction des nombres décimaux
   - **Situation : écriture à virgule** (ermel CM2)
   - **Situation : L'enveloppe de nombres avec les nombres décimaux**

4) comparaison, addition soustraction des nombres décimaux
   - **Situations :Comparaison 1 et 2** (ermel CM2)

5) multiplication de deux nombres décimaux
   - **Situation :multiplier un décimal par un entier** (ermel CM2)
   - **Situation :Les devises (multiplication et division par 10, 100, 1000)** (ermel CM2)
   - **Situation : Un rectangle de périmètre 15** (IREM de Rennes)

6) relations entre les écritures à virgule et les écritures complexes
   - **Situation : Ecriture décimale-écriture complexe** (ermel CM2)
7) relation avec le système métrique
   - **Situation : Drôle de système (métrique) !** (ermel CM2)

Bibliographie :

- les ouvrages d'ermel CM1- CM2
- « donner du sens aux mathématiques » tome2, Muriel Fénichel et Nathalie Pfaff edition Bordas
- Collection : outils pour les cycles, activités numériques cycle3 sceren CRDP Nord Pas de Calais
- Cap Math CM1